第２講　複素数で点を移動

2

［A］ 2つの異なる定まった複素数 α, β がある．自然数 n と複素数 w が与えられたとき，複素数 z_n を，

$$\frac{z_n-\alpha}{\beta-\alpha}=w^n$$

で定める．α，β，z_n の表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，P_n とする．

(1) 3点 A，B，P_1 および A，B，P_2 が面積の等しい三角形をつくるための w の条件を求め，これを複素数平面上に図示せよ．

(2) $\alpha=0$，$\beta=i$ とし，w が(1)で求めた条件を満たしながら変わるとき，P_2 の描く図形を図示せよ．

［B］ 複素数平面において，点 z に関する次の条件を考える．

『原点と異なる点 α を中心として点 z を θ だけ回転すると，移った点の絶対値が α の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる』

(1) $\alpha=i$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか.

(2) $(\alpha,\ \theta)$ を1組固定したとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか.

(3) 点 α が実軸上にあるとき，(2)の図形が虚軸に接するときの θ の値を求めよ．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　複素数で点を移動

2　複素数平面の原点を P_0 とし，P_0 から実軸の正の方向に１進んだ点を P_1 とする．次に P_1 を中心として $45°$ 回転して向きを変え，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする．以下同様に P_n に到達したあと $45°$ 回転してから前回進んだ距離の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする．このとき点 P_{10} が表す複素数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　複素数で点を移動

2

［A］ 2つの異なる定まった複素数 α, β がある．自然数 n と複素数 w が与えられたとき，複素数 z_n を，

$$\frac{z_n-\alpha}{\beta-\alpha}=w^n$$

で定める．α，β，z_n の表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，P_n とする．

(1) 3点 A，B，P_1 および A，B，P_2 が面積の等しい三角形をつくるための w の条件を求め，これを複素数平面上に図示せよ．

(2) $\alpha=0$，$\beta=i$ とし，w が(1)で求めた条件を満たしながら変わるとき，P_2 の描く図形を図示せよ．

［B］ 複素数平面において，点 z に関する次の条件を考える．

『原点と異なる点 α を中心として点 z を θ だけ回転すると，移った点の絶対値が α の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる』

(1) $\alpha=i$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか．

(2) (α, θ) を1組固定したとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか．

(3) 点 α が実軸上にあるとき，(2)の図形が虚軸に接するときの θ の値を求めよ．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．

【答】 ［A］ 略

［B］ (1) 点 $-1+i$ を中心とする，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円

(2) 点 $\alpha(1-\cos\theta+i\sin\theta)$ を中心とする，半径 $\dfrac{1}{2}|\alpha|$ の円　(3) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

【解説】

［A］ (1) $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$\mathrm{AP}_n=r^n\mathrm{AB},\quad \angle\mathrm{BAP}_n=n\theta$$

であり，$\triangle\mathrm{ABP}_1$ と $\triangle\mathrm{ABP}_2$ の面積が等しいので，

$r>0$，$\sin\theta\neq0$ より

$$\left|\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}_1\sin\angle\mathrm{BAP}_1\right|=\left|\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}_2\sin\angle\mathrm{BAP}_2\right|$$

$$\iff\quad r\mathrm{AB}|\sin\theta|=r^2\mathrm{AB}|\sin2\theta|$$

$$\iff\quad r|\cos\theta|=\frac{1}{2}$$

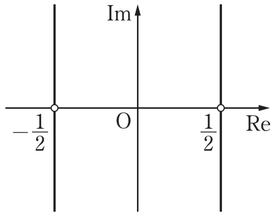
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\sin\theta \neq 0$ かつ $\sin 2\theta \neq 0$ より

$\theta \neq \dfrac{k}{2}\pi$ （k は整数）に注意して，

$$\frac{w+\overline{w}}{2} = \pm\frac{1}{2} \text{ かつ } w \neq \overline{w}$$



(2)
$$\frac{z_2-\alpha}{\beta-\alpha} = w^2 \qquad \therefore \quad z_2 = iw^2$$

ここで $w = \pm\dfrac{1}{2} + ti$ （$t \neq 0$）とおくと

$$w^2 = \frac{1}{4} - t^2 \pm ti$$

よって

$$iw^2 = \mp t + \left(\frac{1}{4} - t^2\right)i$$

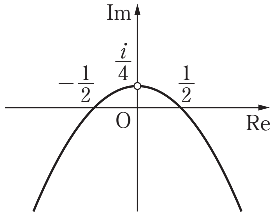
このとき

$$\begin{cases} X = \mp t \\ Y = \dfrac{1}{4} - t^2 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

とおいて $t = \mp X$ を残りの式へ代入して

$$Y = \frac{1}{4} - (\mp X)^2 \text{ かつ } \mp X \neq 0$$

$$\iff \quad Y = \frac{1}{4} - X^2 \ (X \neq 0)$$



［B］ 移った点を表す複素数を ω とすると

$$\omega - \alpha = (z-\alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$\alpha=i$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\begin{cases}\omega-i=(z-i)\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\\ |\omega|=\dfrac{1}{2}|i|\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\omega=i(z-i+1) & \cdots\cdots①\\ |\omega|=\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①を②へ代入すると

$$② \iff |i(z-i+1)|=\frac{1}{2}$$

$$\iff |z-(-1+i)|=\frac{1}{2}$$

よって，点 z の全体は，**点 $-1+i$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円**

(2)　$\cos\theta+i\sin\theta=\beta$ とおくと

$$\begin{cases}\omega=\alpha+(z-\alpha)\beta & \cdots\cdots③\\ |\omega|=\dfrac{1}{2}|\alpha| & \cdots\cdots④\end{cases}$$

③を④へ代入して

$$④ \iff |\alpha+(z-\alpha)\beta|=\frac{1}{2}|\alpha|$$

$$\iff \left|z-\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta}\right|=\frac{1}{2}|\alpha|$$

よって，点 z の全体は，

中心 $\dfrac{\alpha(\beta-1)}{\beta}=\alpha(1-\beta^{-1})$

$=\alpha[1-\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}]$

$=\boldsymbol{\alpha(1-\cos\theta+i\sin\theta)}$

半径 $\dfrac{1}{2}|\alpha|$ の円

(3)　(2)で求めた中心の実部 $\alpha(1-\cos\theta)$ の絶対値が半径 $\dfrac{1}{2}|\alpha|$ に等しくなればよいので

$$|\alpha(1-\cos\theta)|=\frac{1}{2}|\alpha|$$

$$\iff 1-\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}\quad(|\cos\theta|\leqq 1 \text{ より})$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　複素数で点を移動

2　複素数平面の原点を P_0 とし，P_0 から実軸の正の方向に１進んだ点を P_1 とする．次に P_1 を中心として 45° 回転して向きを変え，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする．以下同様に P_n に到達したあと 45° 回転してから前回進んだ距離の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする．このとき点 P_{10} が表す複素数を求めよ．

【答】 $\frac{33}{32}+\frac{31}{32}i$

【解説】

$P_n(\alpha_n)$ とおくと，

$$\alpha_0=0,\quad \alpha_1=1$$

ここで題意より

$$\begin{aligned}&\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}\\&=(\alpha_n-\alpha_{n+1})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos(-135^\circ)+i\sin(-135^\circ)\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)(\alpha_{n+1}-\alpha_n)\end{aligned}$$

が成り立つので，$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=\beta$ とおくと

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=(\alpha_1-\alpha_0)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\right\}^n$$

$$\therefore\quad \alpha_{n+1}-\alpha_n=\beta^n$$

この式に $n=0,\ 1,\ \cdots,\ 9$ を代入して辺々を加えると，

$$\begin{aligned}&\alpha_{10}-\alpha_0=\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^9\\ \iff\ &\alpha_{10}=\frac{\beta^{10}-1}{\beta-1}\\&=\frac{\frac{1}{32}i-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)-1}\\&=\boldsymbol{\frac{33}{32}+\frac{31}{32}i}\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。